

МОДЕЛИ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-МЕНЕДЖЕРОВ

Барановская С.Н., Яшкин В.И.

Белорусский государственный университет, г. Минск

Понятие о моделировании с помощью дифференциальных уравнений следует рассматривать как необходимую составляющую в системе подготовки современного специалиста в области менеджмента. На математическое образование менеджера в сфере международного туризма в рамках дисциплины «Высшая математика» в Белорусском государственном университете по учебному плану отведено 409 часов, из них лекции составляют 106 часов, практические занятия – 104 часа. Во втором семестре студенты изучают раздел, посвященный обыкновенным дифференциальным уравнениям и моделям в сфере туризма. Учебный материал этого раздела содержит, в частности, следующие вопросы: понятие о математическом моделировании экономических процессов; ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами; задача Коши, ее геометрический смысл; системы дифференциальных уравнений; приложения дифференциальных уравнений в экономике туризма. Приведем далее две прикладные задачи, которые изучаются будущими специалистами в области туристской индустрии на лекционных и практических занятиях.

1. Рассмотрим пример применения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для решения простой модели рынка спроса и предложения туристских услуг [1].

Постановка задачи. Пусть непрерывная и дифференцируемая по t функция $D(t)$ характеризует спрос туристических путевок в некоторый определенный регион:

$$D(t) = p''(t) - p'(t) - 2p(t) + 12, \quad (1)$$

где $t \geq 0$ – время, $p(t)$ – цена тура. Пусть непрерывная и дифференцируемая по t функция $S(t)$ характеризует предложение по этой услуге:

$$S(t) = 2p''(t) + 3p'(t) + 3p(t) + 2. \quad (2)$$

Найти динамику цены $p(t)$ на туристические путевки в случае равновесного состояния рынка, если в начальный момент времени

$$p(0) = 3, \quad p'(0) = 1 \quad (\text{в ден. ед.}). \quad (3)$$

Решение. По условию рынок моделируется равенством: $D(t) = S(t)$.

Из (1) и (2) получаем неоднородное ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами относительно неизвестной функции $p(t)$:

$$p''(t) + 4p'(t) + 5p(t) = 10. \quad (4)$$

Общее решение (4): $p(t) = 2 + e^{-2t}(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t))$.

Используя начальные условия (3), находим константы C_1 и C_2 и получаем решение задачи Коши (4), (3) в виде:

$$p(t) = 2 + e^{-2t}(\cos(t) + 3\sin(t)).$$

Заметим, что $p(t) \rightarrow p^*(t) = 2$ при неограниченном росте времени $t \rightarrow \infty$, тогда все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $p(t) = 2$ и колеблются около неё. Это означает, что цена путевок стремится к установившейся цене $p^*(t) = 2$, причем амплитуда ценовых колебаний затухает с течением времени, решение модели отражает состояние равновесия спроса и предложения туристских услуг.

2. Компания SITA является признанным лидером в разработке технологий обработки багажа для авиатранспортной отрасли [2]. Методики SITA для управления обработкой багажа используют сегодня более 200 аэропортов и 500 авиакомпаний по всему миру. Будучи поставщиком услуг для авиаиндустрии, SITA продолжает инвестировать средства в новые технологии, направленные на совершенствование процессов обработки багажа. Это позволило авиакомпаниям сократить свои потери на 19,9% за прошедший год. В улучшении показателей доставки багажа важную роль сыграло внедрение новейших систем транспортировки багажа. Например, группа компаний BEUMER Group поставляет системы подачи, комплектации, хранения и выдачи багажа с расчетом на высокую нагрузку, максимальную надежность и долгий срок службы, чтобы удовлетворить требования аэропортов любого размера [3].

Теория менеджмента применяет научные методы анализа с целью выработки определённых методов и рекомендаций для практики управления. Эффективное применение этих методов и рекомендаций зависит от сочетания конкретных условий. Для примера рассмотрим достаточно идеальную модель транспортной логистики.

Постановка задачи. Пусть багаж объёмом 1000 условных багажных мест перемещается последовательно из пункта A_1 через промежуточные A_2, A_3, A_4 в конечный пункт A_5 (допустим, это грузовой отсек авиалайнера). Транспортировка осуществляется с помощью четырех транспортировочных

механизмов, обладающих соответственно производительностью k_1, k_2, k_3, k_4 . Предполагается, что скорости перемещения багажа прямо пропорциональны объемам багажа. Требуется установить зависимость количества багажных мест в пунктах $A_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$, в момент времени $t > 0$.

Математической моделью поставленной задачи является система (5) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями:

Идеализация прикладной проблемы, состоящая в том, что скорости перемещения багажа прямо пропорциональны объемам багажа, обуславливает порядок дифференциальных уравнений относительно $y_i(t)$.

Вид частного решения задачи Коши (5) показывает, что погрузка будет успешно завершена в момент времени $t = 0,18$ (усл. ед. времени) [4].

$$\begin{cases} y_1'(t) = -k_1 y_1, \\ y_i'(t) = k_{i-1} y_{i-1} - k_i y_i, & 2 \leq i \leq 4, \\ y_5'(t) = k_4 y_4, \\ y_1(0) = 1000, y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = y_5(0) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Исследование подобных моделей в курсе высшей математики преследует цели помочь студентам более глубоко осмыслить материал экономических курсов и наполнить занятия по математике профессиональным содержанием.

Литература

1. Барановская, С.Н. Применение дифференциальных уравнений для решения некоторых моделей менеджмента / С.Н. Барановская, В.И. Яшкин // Медико-социальная экология личности: состояние и перспективы: материалы XI Междунар. конф., Минск, 17–18 мая 2013 г. / редкол.: В.А. Прокашева (отв. ред.) [и др.]. / Изд. центр БГУ. – Минск, 2013. – С. 474–476.
2. SITA Baggage Report / [электронный ресурс]. Режим доступа: <http://ru.sita.aero/2014/press-relizy.htm>.
3. Системы транспортировки багажа BEUMER Group GmbH & Co. / [электронный ресурс]. Режим доступа: <http://yandex.ru/count/> Системы транспортировки багажа BEUMER Group GmbH & Co.KG.htm.
4. Яшкин, В.И. Решение одной задачи менеджмента о транспортировке багажа / В.И. Яшкин, Д.Е. Ермашкевич // Современные проблемы математического моделирования и новые образовательные технологии в математике: материалы Республ. науч.-практ. конф., Брест, 24–25 апр. 2013 г. / БрГУ. – Брест, 2013. – С. 67–69.